

ÜBER ABSOLUT REINE RINGE

Tilman Würfel

München

1972

ÜBER ABSOLUT REINE RINGE

Inaugural-Dissertation zur Erlangung der
Doktorwürde der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

Vorgelegt von Tilmann Würfel

München , Dezember 1971



1. Berichterstatter: Prof. Dr. F. Kasch
 2. Berichterstatter: Prof. Dr. U. Oberst
- Tag der mündlichen Prüfung: 14.7.1972

Einleitung und Inhaltsangabe

Gegenstand dieser Arbeit ist folgender Begriff einer schwachen Injektivität für Moduln: Ein Modul M heißt absolut rein, wenn $\text{Ext}^1(P, M) = 0$ ist für alle endlich präsentierten Moduln P . Mit P.M.Cohns [6] Verallgemeinerung des Begriffs der reinen Untergruppen abelscher Gruppen werden die absolut reinen Moduln gerade diejenigen, welche reine Untermoduln jedes sie enthaltenden Moduls sind. Neben dem hier verwendeten Reinheitsbegriff sind weitere Theorien ähnlicher Art mitsamt deren relativer homologischer Algebra in [8] und [17 - 20] behandelt. Ein absolut reiner Modul M ist genau dann injektiv, wenn zu jeder nach unten gefilterten Menge von Annulatoruntergruppen M_i von M der Gruppenhomomorphismus $M \rightarrow \varprojlim M/M_i$ surjektiv ist. Während Kompaktheitsfragen dieser Art mitunter schwierig zu beantworten sind (etwa für Ringe, welche einseitige injektive Kogeneratoren sind), läßt sich die absolute Reinheit eines Moduls über seinem Endomorphismenring durch eine gewisse schwache Kogenerator-eigenschaft des Moduls über dem vorgegebenen Ring charakterisieren.

Diese Tatsache macht den Begriff für Ringe interessant - man erhält so den Satz von E.R.Gentile [9] : Ein Ring ist genau dann absolut reiner Linksmodul, wenn alle seine endlich präsentierten Rechtsmoduln torsionslos sind. Mit Hilfe eines Ergebnisses von M.Auslander [1] läßt sich ein kurzer homologischer Beweis dieses Satzes angeben. Beispiele solcher Ringe sind neben injektiven Ringen von Neumann-reguläre Ringe (allgemeiner solche Ringe, deren injektive Moduln flach sind), ferner Ringe, die (einseitige) Kogeneratoren sind, und Gruppenringe von lokal-endlichen Gruppen mit Koeffizienten in einem absolut reinen Ring. Ausgangspunkt dieser Überlegungen ist die Arbeit von M.Ikeda und T.Nakayama [11], in welcher die Autoren Beziehungen zwischen schwacher links-Injektivität eines Rings und Annulatorbedingung für Rechtsideale zeigen.

Die Abschnitte 1 und 2 enthalten neben den grundlegenden Charakterisierungen reiner Untermoduln und absolut reiner Moduln einige Beispiele und Kriterien. So hat die kanonische Abbildung $\oplus X_i \rightarrow X$ eines gefilterten direkten Systems von Moduln X_i in seinen direkten Limes X einen reinen Kern (1.4), und gewisse Auswertungsabbildungen der Form $X \rightarrow \text{Hom}(\text{Hom}(X, K), L)$ haben ein reines Bild (1.7). Auch reine Ringerweiterungen treten auf - so ist z.B. jeder Ring reiner Untermodul des Bikommutators eines Kogenerators (1.8, 1.9). Ein hinreichendes Kriterium der absoluten Reinheit eines Moduls ist die Flachheit geeigneter Charaktermoduln (2.3) - daraus folgt unmittelbar, daß jeder Kogenerator absolut rein über seinem Endomorphismenring ist (2.4). Mit Hilfe A.Grothendiecks [10] Konstruktion der "effacements injectifs" lassen sich gewisse absolut reine Erweiterungen von Moduln angeben als gefilterte direkte Limites abzählbarer Systeme (2.6).

Im Teil 3 benütze ich folgendes Resultat von M.Auslander [1], um diejenigen Moduln zu charakterisieren, welche absolut rein über ihrem Endomorphismenring sind: Kern und Kokern der natürlichen Transformation $Q \otimes - \rightarrow \text{Hom}(Q^*, -)$ für einen endlich präsentierten Modul Q und seinen Ring-Dualen Q^* sind Kohomologiegruppen $\text{Ext}^1(P, -)$ und $\text{Ext}^2(P, -)$ mit einem endlich präsentierten Modul P , wobei P und Q in einfacher Weise voneinander abhängen, nämlich ein "duales Paar" bilden (3.1, 3.2). Daraus erhält man Gentiles Satz (3.3) und die allgemeine Charakterisierung der erwähnten Moduln (3.6).

Im Abschnitt 4 habe ich untersucht, welche der bekannten Eigenschaften injektiver Ringe auch absolut reine Ringe besitzen. Wie im injektiven Fall sind Radikal und singuläres Ideal gleich (4.4); und das Zentrum eines absolut reinen und radikalfreien Rings ist von Neumann-regulär (4.7). Aber ein absolut reiner Ring ist nicht notwendig f-semiperfekt (4.6, 2)) - diese Eigenschaft erfordert eine zusätzliche Endlichkeitsbedingung (4.5).

Eine weitere Endlichkeitsbedingung, welche zusammen mit absoluter Reinheit für Ringe zu interessanten Sätzen führt, ist die der Kohärenz - das haben B.T.Stenström [18] und G.Sabbagh [17] bemerkt. Letzterer Autor hat diejenigen Ringe charakterisiert, deren injektive Links- wie Rechtsmoduln flach sind: Es sind genau die beidseitig kohärenten und absolut reinen Ringe. Diesen Satz habe ich im Abschnitt 5 "halbiert": Flachheit der injektiven Linksmoduln ist gleichwertig mit absoluter Reinheit und fast-Kohärenz des Rings auf der anderen Seite (5.6). Dabei bedeutet fast-Kohärenz nach R.Desqs [7] Verallgemeinerung der Methoden von V.C.Cateforis [4] diejenige Eigenschaft eines Rings, welche man erhält, wenn man in der ursprünglichen Definition kohärenter Ringe von S.U.Chase [5] in geeigneter Weise den Begriff "endlich erzeugt" durch "endlich erzeugt bis auf Torsion" ersetzt; dabei ist die durch die dichten Ideale des Rings definierte Torsion gemeint.

Mit Hilfe der Methoden aus [7] läßt sich ferner ein Kriterium der Flachheit von Quotientenringen angeben (6.2): Besitzt ein rechts-fast-kohärenter Ring einen links-absolut reinen Rechtsquotientenring, dann ist dieser links-flach. Diese Bemerkung verallgemeinert den Hauptsatz aus [4], der unter den Ringen ohne rechts-singuläres Ideal diejenigen beschreibt, welche einen links-flachen maximalen (oder nur von Neumann-regulären) Rechtsquotientenring besitzen - es sind gerade die rechts-fast-kohärenten Ringe.

Die letzten Beispiele absolut reiner Ringe sind Gruppenringe. Mit der bekannten Methode der Charakterisierung von Neumann-regulärer Gruppenringe zeige ich (7.1): Ein Gruppenring ist genau dann absolut rein, wenn der Koeffizientenring es ist und die Gruppe lokal endlich ist. Ein Beispiel dieser Art hatte bereits M.-P.Malliavin [15] angegeben. Dabei bemerkt man, daß gefilterte Vereinigungen absolut reiner Unterringe wieder absolut reine Ringe sind (7.4).

Ich danke Herrn Professor F.Kasch und Herrn Dr.W.Zimmermann für ihre Anregungen und Hinweise zu dieser Arbeit.

Inhalt

	Seite
0. Konventionen und Bezeichnungen	0
1. Reine Untermoduln	1
2. Absolut reine Moduln .	7
3. Moduln über dem Endomorphismenring	13
4. Einige Eigenschaften absolut reiner Ringe	17
5. Flache injektive Moduln	22
6. Eine Bemerkung über flache Quotientenringe	30
7. Absolut reine Gruppenringe	33
 Literatur	 36

0. Konventionen und Bezeichnungen

1. Alle betrachteten Ringe seien assoziativ und besitzen ein Einselement. Ringhomomorphismen führen die Einselemente in einander über. Alle Moduln seien unitär. $R\text{-Mod}$ bzw. $\text{Mod-}R$ bezeichne die Kategorie der Links- bzw. Rechtsmoduln über dem Ring R . Für $X \in R\text{-Mod}$ schreibe ich auch ${}_R X$. Zu $X, Y \in R\text{-Mod}$ bezeichne $\text{Hom}_R(X, Y)$ oder $\text{Hom}({}_R X, {}_R Y)$ die Menge der Homomorphismen von X nach Y . Ist etwa ${}_R X_S$ ein Bimodul, so bezeichne $\text{Hom}({}_R X_S, {}_R Y)$ den entstehenden S -Linksmodul. Analoge Bezeichnungen werden für das Tensorprodukt $\otimes$ verwendet. Die Hieroglyphen $\ell, \star$ bezeichnen Links- bzw. Rechtsannulatoren.
2. Zu den Begriffen kleiner und großer Untermoduln, ferner zu denen des Generators bzw. Kogenerators und deren Eigenschaften in Modulkategorien verweise ich auf [13].
3. Endlich präsentierte Moduln sind die Kokerne von Homomorphismen zwischen endlich erzeugten freien Moduln. Ihre grundlegenden Eigenschaften, wie etwa die Tatsache, daß jeder Modul gefilterter direkter Limes endlich präsentierte Moduln ist, finden sich in [2]. Dort sind auch die Charakterisierungen von Neumann-regulärer und kohärenter Ringe angegeben; für letztere ist darüberhinaus [5] zuständig.
4. N, Z, Q bezeichne die natürlichen, ganzen bzw. rationalen Zahlen.

1. Reine Untermoduln

1.1 Satz: Sei R ein Ring. Für eine exakte Folge $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ aus $R\text{-Mod}$ sind folgende Eigenschaften äquivalent:

1) $0 \rightarrow M \otimes_R A \rightarrow M \otimes_R B$ ist exakt für jeden (endlich präsentierten) Modul M_R .

2) Zu jedem System von Gleichungen $a_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} b_j$ ($1 \leq i \leq m$) mit $m, n \in \mathbb{N}$, $a_i \in A$, $b_j \in B$ und $r_{ij} \in R$ gibt es $x_j \in A$, so daß $a_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} x_j$ ($1 \leq i \leq m$) gilt.

3) $\text{Hom}_R(P, B) \rightarrow \text{Hom}_R(P, C) \rightarrow 0$ ist exakt für jeden endlich präsentierten Modul R^P .

4) Mit $A_R^+ := \text{Hom}_Z(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ zerfällt die exakte Folge $0 \rightarrow C^+ \rightarrow B^+ \rightarrow A^+ \rightarrow 0$ in $\text{Mod-}R$.

Beweis "1) $\Leftrightarrow$ 2)" bei P.M.Cohn [6; Theorem 2.4]

"1) $\Leftrightarrow$ 3) $\Leftrightarrow$ 4)" bei B.T.Stenström [19; Prop. 9.1]

"1) $\Leftrightarrow$ 3)" auch bei D.J.Fieldhouse [8; Theorem 7.1]

1.2 Definition: Eine kurze exakte Folge mit obigen äquivalenten Eigenschaften heißt rein. Ein Monomorphismus bzw. Epimorphismus $f: X \rightarrow Y$ heißt rein, wenn $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \rightarrow \text{Kok}(f) \rightarrow 0$ bzw. $0 \rightarrow \text{Ker}(f) \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \rightarrow 0$ rein ist. Ein Untermodul heißt rein, wenn die entsprechende Inklusionsabbildung rein ist.

Bekannt ist folgendes

1.3 Beispiel: Ein Modul M ist genau dann flach, wenn jede exakte Folge von Moduln $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow M \rightarrow 0$ rein ist (für die Flachheit von M genügt die Existenz einer solchen reinen exakten Folge mit flachem Y).

Weitere Beispiele reiner Untermoduln liefern die beiden folgenden Sätze:

1.4 Satz: Sei $(I, \leq)$ eine geordnete rechtsgefilterte Menge und $(X_i \xrightarrow{f_{ji}} X_j)_{i,j \in I}$ ein direktes System von R -Linksmoduln mit $(X_i \xrightarrow{g_i} X) = \varinjlim_{i \in I} (X_i, f_{ji})$. Dann ist $g = (g_i) : \bigoplus_{i \in I} X_i \rightarrow X$ reiner Epimorphismus.

Beweis: Sei $P \in R\text{-Mod}$. Dann besteht das kommutative Diagramm der kanonischen Abbildungen:

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim_i \text{Hom}(P, X_i) & \xrightarrow{a} & \text{Hom}(P, X) \\ \uparrow d & & \uparrow b \\ \bigoplus_i \text{Hom}(P, X_i) & \longrightarrow & \text{Hom}(P, \bigoplus_i X_i) \end{array}$$

Dabei ist $b = \text{Hom}(P, g)$ und d surjektiv. Ist P endlich präsentiert, so vertauscht der Funktor $\text{Hom}(P, -) : R\text{-Mod} \rightarrow Z\text{-Mod}$ mit gefilterten direkten Limites ([2], chap.1, §2, ex.9), d.h. $a = \varinjlim \text{Hom}(P, g_i)$ ist Isomorphismus. Also ist $\text{Hom}(P, g)$ surjektiv, und mit 1.1 folgt die Behauptung.

1.5 Bemerkung: Aus 1.4 folgt leicht die Charakterisierung rein-projektiver Moduln (d.h. derjenigen Moduln, welche projektiv für reine Epimorphismen sind) als direkte Summanden direkter Summen endlich präsentierter Moduln.

1.6 Bezeichnung: Seien X, Y zwei Moduln. " X erzeugt Y " möge heißen, daß Y epimorphes Bild einer direkten Summe von Exemplaren von X ist, und " X koerzeugt Y ", daß Y monomorph in ein Produkt von Exemplaren von X abgebildet werden kann. Ein Modul, den der Grundring koerzeugt, heißt torsionslos.

Die folgende Aussage verallgemeinert die bekannte Tatsache, daß zu jedem Modul X die natürliche Abbildung $X \rightarrow X^{++}$ mit $-^+ = \text{Hom}_Z(-, Q/Z)$ reiner Monomorphismus ist.

1.7 Satz: Seien R, S, T Ringe, ${}_R X_S$ und ${}_T K_S$ Bimoduln, ferner ${}_T K \xrightarrow{1} {}_T L$ ein Monomorphismus mit injektivem ${}_T L$ und $a(X): X \rightarrow \dots \rightarrow \text{Hom}_T(\text{Hom}_S(X, K), L)$ mit $x \mapsto (f \mapsto lf(x))$ die Auswertungsabbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) $a(X)$ ist reiner R -Monomorphismus.
- 2) K_S koerzeugt alle S -Moduln der Form $\bigoplus_R Q_R X$ mit endlich prä. Q_R .

Ferner gilt die Implikation " $2) \Rightarrow 1)$ " auch, wenn ${}_T L$ nicht injektiv ist.

Beweis: Die Abbildung $a(X)$ ist R -linear. Sei $H = \text{Hom}_S(-, K) : \text{Mod-}S \rightarrow \text{Mod-}T$. Dann besteht für jeden Modul Q_R das kommutative Diagramm der kanonischen Abbildungen:

$$\begin{array}{ccc}
 {}_R Q \otimes \text{Hom}_T(H(X)_R, L) & \xrightarrow{b(Q, L)} & \text{Hom}_T(\text{Hom}_R(Q, {}_T H(X)), L) \\
 \uparrow \scriptstyle Q \otimes a(X) & & \uparrow \scriptstyle m \\
 {}_R Q \otimes X & \xrightarrow{a(Q \otimes X)} & \text{Hom}_T(H({}_R Q \otimes X), L)
 \end{array}$$

Ist Q_R endlich präsentiert und ${}_T L$ injektiv, so ist $b(Q, L) = (q \otimes g \mapsto (h \mapsto gh(q)))$ ein Z -Isomorphismus ([2; Chap. 1, §2, Exercice 14]). Also ist $a(X)$ genau dann reiner Monomorphismus, wenn $a(Q \otimes X)$ für alle endlich präsentierten Q_R injektiv ist. Da $K \xrightarrow{1} L$ monomorph ist, wird letztere Bedingung gleichbedeutend mit 2).

Ist ${}_T L$ nicht notwendig injektiv und gilt 2), dann ist in obigem Diagramm die Abbildung $a(Q \otimes X)$ injektiv, also auch $Q \otimes a(X)$ - d.h. es gilt 1).

Bemerkung: Die Moduln ${}_R Q \otimes X_S$ sind (für endl. präsentierte Q_R) die Kokerne gewisser Abbildungen $X_S^m \rightarrow X_S^n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ (s. 3.5). Ferner ist $\text{Ziel}(a(X))$ stets rein-injektiver R -Modul, falls ${}_T L$ (rein-) injektiv ist.

Auf Ringerweiterungen angewendet läßt der Begriff der Reinheit folgende Charakterisierung "reiner Ringerweiterungen" zu:

1.8 Satz: Für eine Ringerweiterung $R \hookrightarrow S$ sind die Eigenschaften äquivalent :

- 1) R_R ist rein in S_R .
- 2) Der Funktor $S \otimes_R - : R\text{-Mod} \longrightarrow S\text{-Mod}$ ist treu .
- 3) Ist ${}_S K \in S\text{-Mod}$ ein Kogenerator, dann auch ${}_R K \in R\text{-Mod}$.
- 4) Es gibt einen Modul ${}_S K$, so daß ${}_R K$ Kogenerator in $R\text{-Mod}$ ist .

Beweis:

"1) $\Leftrightarrow$ 2)" folgt unmittelbar aus 1.1 .

"2) $\Leftrightarrow$ 3) $\Leftrightarrow$ 4)" ist eine Eigenschaft adjungierter Funktoren:

Sind nämlich $T: \underline{C} \longrightarrow \underline{D}$ und $V: \underline{D} \longrightarrow \underline{C}$ Funktoren zwischen den Kategorien $\underline{C}$ & $\underline{D}$, und ist T linksadjungiert zu V , dann gilt : Ist T treu und K ein Kogenerator in $\underline{D}$, so ist $V(K)$ Kogenerator in $\underline{C}$. Enthält $\text{Bi}(V)$ einen Kogenerator für $\underline{C}$, so ist T treu . Das folgt aus der Isomorphie der Funktoren $\text{Mor}_{\underline{C}}(-, V(K)) \cong \text{Mor}_{\underline{D}}(T-, K) = \text{Mor}_{\underline{D}}(-, K) \cdot T$. Hier ist $T = S \otimes_R -$ und V der vergessende Funktor .

1.9 Beispiele: Sei R ein Ring, $M \in \text{Mod-}R$, S der Bikommutator von M_R und $j: R \longrightarrow S$ der natürliche Ringhomomorphismus, dann gilt:

- 1) Koerzeugt M_R alle endlich präsentierten R -Rechtsmoduln (z.B. M_R Kogenerator), so ist $j: {}_R R \longrightarrow {}_R S$ reiner Monomorphismus.
- 2) Gibt es einen reinen Monomorphismus $R_R \longrightarrow M_R$, dann ist $j: R_R \longrightarrow S_R$ reiner Monomorphismus. Ist M_R zusätzlich rein-injektiv (d.h. injektiv für reine Monomorphismen), z.B. falls $R_R \longrightarrow M_R$ die rein-injektive Hülle von R_R ist (etwa [20; Prop.6]), dann läßt sich S in M einbetten.

Beweis: Sei $T = \text{End}(M_R)$.

1) In der Situation $({}_R R_R, {}_T M_R, {}_T M)$ ist nach 1.7 und der Voraussetzung die Auswertungsabbildung ${}_R R \longrightarrow \text{Hom}_T(\text{Hom}_R(R, M), M) = {}_R \text{End}({}_T M) = {}_R S$ reiner Monomorphismus.

2) Ist R_R reiner Untermodul von M_R , dann läßt sich die Inklusion $i: R \hookrightarrow M$ faktorisieren zu
$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{i} & M \\ & \searrow j & \nearrow a \\ & S & \end{array}$$
, wobei $a(s) = 1_R s$ ist.

Da $i = aj$ reiner Monomorphismus ist, wird es nach der Kürzungsregel (d.h. wegen 1.1,1)) auch $j: R_R \longrightarrow S_R$.

Ist M_R zusätzlich rein-injektiv, so ist (wie bei maximalen Quotientenringen) die Abbildung a injektiv: Die Abbildung $T \ni t \mapsto t 1_R \in M$ wird nämlich surjektiv; ist also $1_R s = 0$ für ein $s \in S$, so folgt $0 = T 1_R s = M s = B i(s)$, d.h. $s = 0$.

2. Absolut reine Moduln

2.1 Satz: Sei R ein Ring und $X \in R\text{-Mod}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) Jeder Monomorphismus ${}_R X \rightarrow {}_R Y$ ist rein .
- 2) Es gibt einen reinen Monomorphismus ${}_R X \rightarrow {}_R Y$ mit injektivem ${}_R Y$.
- 3) Zu jedem endlich erzeugten Untermodul U eines freien (bzw. endlich präsentierten) Moduls ${}_R F$ und Homomorphismus ${}_R U \rightarrow {}_R X$ gibt es eine Fortsetzung ${}_R F \rightarrow {}_R X$.
- 4) $\text{Ext}_R^1(P, X) = 0$ für jeden endlich präsentierten Modul ${}_R P$.

Diese Tatsache ist bekannt und leicht zu beweisen.

2.2 Definition: Ein Modul ${}_R X$ mit obigen äquivalenten Eigenschaften heißt absolut rein (andere Autoren verwenden auch die Ausdrücke "FP-injektiv" oder "rein").

2.3 Kriterium: Seien R, S Ringe, ${}_R X_S$ ein Bimodul und K_S ein Modul, der alle Kokerne von Homomorphismen $X_S^m \rightarrow X_S^n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) koerzeugt. Dann gilt:

Ist $\text{Hom}_S(X, K)$ flacher R -Modul, so ist ${}_R X$ absolut rein.

Beweis: Sei ${}_Z K \longrightarrow {}_Z L$ eine injektive Erweiterung von ${}_Z K$. Ist dann der Bimodul ${}_Z H_R := \text{Hom}_S(X, K)$ flacher R -Modul, so ist $\text{Hom}_Z(H, L)$ injektiver R -Modul. Ferner ist nach Voraussetzung die Auswertung $X \longrightarrow \text{Hom}_Z(H, L)$ reiner R -Monomorphismus (1.7). Also ist ${}_R X$ absolut rein (2.1).

2.4 Folgerung: Sei S ein Ring, $X \in \text{Mod-}S$ ein Kogenerator und $R := \text{End}(X_S)$. Dann ist ${}_R X$ absolut rein. (Entsprechend der Tatsache, daß Generatoren projektiv über ihrem Endomorphismenring sind.)

Beweis: (Der allgemeine Fall wird in 3.6 behandelt.)
 $\text{Hom}({}_R X_S, X_S) = R_R$ ist flach.

Die Frage, wann das Kriterium 2.3 auch notwendig ist, kann im Fall $S=Z$ & $K=Q/Z$ leicht beantwortet werden. Es gilt nämlich:

2.5 Bemerkung: Für einen Ring R sind die Eigenschaften äquivalent:

- 1) R ist links-kohärent.
- 2) Der Charaktermodul $X_R^+ := \text{Hom}_Z(X, Q/Z)$ jedes absolut reinen Linksmoduls ${}_R X$ ist flach.

Beweis:

"1) $\Rightarrow$ 2)" : Ist ${}_R R$ kohärent, dann besitzt jeder endlich präsentierte Linksmodul ${}_R P$ eine projektive Auflösung bestehend aus endlich erzeugten freien Moduln. Daher besteht für jeden Modul ${}_R X$ der Dualitätsisomorphismus $\text{Tor}^R(X^+, P) \xrightarrow{\cong} (\text{Ext}_R(P, X))^+$ ([3 ; Chap. VI, Prop. 5.3, Remark]). Also ist X genau dann absolut rein, wenn X^+ flach ist.

"2) $\Rightarrow$ 1)": Ich zeige, daß gefilterte direkte Limites absolut reiner Linksmoduln absolut rein sind - dann ist R links-kohärent nach [18;Theorem 3.2]. Dafür genügt es aber wegen 1.4 zu zeigen, daß ${}_R X/U$ absolut rein ist, wenn ${}_R X$ es ist und U reiner Untermodul von ${}_R X$ ist. In dieser Situation hat man nach 1.1 die zerfallende exakte Folge $0 \rightarrow (X/U)^+ \rightarrow X^+ \rightarrow U^+ \rightarrow 0$ in $\text{Mod-}R$. Nach Voraussetzung ist X^+ flach, daher auch $(X/U)^+$, und mit 2.3 folgt, daß ${}_R X/U$ absolut rein ist.

Bemerkung: Mit obiger Argumentation ist gezeigt, daß ein Ring R genau dann links-kohärent ist, wenn jeder Faktormodul X/U eines injektiven (oder absolut reinen) R -Linksmoduls X nach einem reinen Untermodul U absolut rein ist. Anders ausgedrückt lautet diese Bedingung: Aus $\text{Ext}^1({}_R P, {}_R X) = 0$ für alle endlich präsentierten P folgt auch $\text{Ext}^2(P, X) = 0$.

Beispiele absolut reiner Moduln erhält man - nach einer Anregung von Herrn W. Zimmermann - durch A. Grothendiecks Konstruktion der "effacements injectifs" ([10; p. 136/137]), wobei sich die Kardinalzahlbetrachtung ibidem wegen der hier nur geforderten schwachen Injektivität erübrigt:

2.6 Satz: Sei R ein Ring. Dann gibt es einen Funktor F von $R\text{-Mod}$ in sich mit einem natürlichen Monomorphismus $f: \text{Identität} \rightarrow F$ und folgenden Eigenschaften:

- 1) $F(X)$ ist absolut rein für alle $X \in R\text{-Mod}$.
- 2) Jeder absolut reine Modul $A \in R\text{-Mod}$ ist $(X \xrightarrow{f(X)} F(X))$ -injektiv (d.h. $\text{Hom}(f(X), A)$ ist surjektiv) für alle $X \in R\text{-Mod}$.

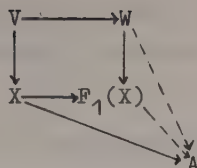
Beweis: Sei ${}_R G = R^{(N)}$ die direkte Summe abzählbar vieler Exemplare von ${}_R R$ und $\underline{U}$ die Menge aller endlich erzeugten Untermoduln U von G . Zu ${}_R X$ sei ferner ${}_R V = \bigoplus_{U \in \underline{U}} U(\text{Hom}(U, X))$ und ${}_R W = \bigoplus_{U \in \underline{U}} G(\text{Hom}(U, X))$ mit der direkten Summe der Inklusionen $j: V \rightarrow W$ und der Abbildung $a: V \rightarrow X$, welche durch die Homomorphismen $U \rightarrow X$ induziert wird. Bildet man nun die Fasersumme

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j} & W \\ a \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f_1(X)} & F_1(X) \end{array} \quad , \text{ dann ist } f_1(X) \text{ injektiv, weil } j \text{ es ist. Die} \\ \text{Abbildung } f_1(X): X \rightarrow F_1(X) \text{ wird dadurch ein} \\ \text{"effacement absolument pur", d.h. zu jedem}$$

Homomorphismus $g: U \rightarrow X$ ($U \in \underline{U}$) gibt es ein kommutatives Diagramm $\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\quad} & G \\ g \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\quad} & F_1(X) \end{array}$, wobei $\xrightarrow{\quad}$ die durch die Inklusion $G \rightarrow W$ auf den g -ten Summanden von W induzierte Abbildung ist.

Ein absolut reiner Modul A ist $(V \xrightarrow{j} W)$ -injektiv. Ist ein Homomorphismus $X \rightarrow A$ gegeben, dann läßt sich daher $(V \xrightarrow{a} X \rightarrow A)$ zu einem $W \rightarrow A$ fortsetzen, welches sich wegen der Fasersummeneigenschaft über ein $F_1(X) \rightarrow A$ faktorisieren läßt, so daß letzterer Homomorphismus eine Fortsetzung von $X \rightarrow A$ wird:

Es besteht ein kommutatives Diagramm



1) Sei $F_0(X) = X$ und $F_{i+1}(X) = F_1(F_i(X))$ mit den komponierten Monomorphismen $f_{ji}: F_i \rightarrow F_j$ ($i < j$) und $f_{1,0} = f_1$. Dann ist $F(X) := \varinjlim (F_i(X); f_{ji} \mid i, j \in \mathbb{N} \text{ \& } i < j)$ absolut rein: Jeder Homomorphismus $U \rightarrow F(X)$ läßt sich, weil U endlich erzeugt und $F_i(X) \rightarrow F(X)$ injektiv ist, über ein $U \rightarrow F_i(X)$ faktorisieren, welches eine Fortsetzung $G \rightarrow F_{i+1}(X)$ besitzt.

2) Sei $f(X) = \varinjlim (X \xrightarrow{f_{j0}} F_j(X))$, dann ist $f(X)$ Monomorphismus. Daß jeder absolut reine Modul A $f(X)$ -injektiv ist, folgt aus der Tatsache, daß A $(F_i \rightarrow F_{i+1})$ -injektiv ist, und durch $\varinjlim$ -Bildung.

2.7 Satz: Sei R ein Ring, $\underline{A} = \{ \mathfrak{A}_R(x) \mid x \in {}_R P \text{ endl. präsentiert} \}$
und $M \in R\text{-Mod}$. Dann sind die Aussagen äquivalent:

- 1) $\text{Ext}_R^1(R/A, M) = 0$ für alle $A \in \underline{A}$.
- 2) $\text{Ext}_R^n(P, M) = 0$ für $n=1 \& 2$ und alle endlich präsentierten ${}_R P$.

Beweis:

Zunächst ist die Bedingung 2) äquivalent zu

2') $\text{Ext}_R^1(U, M) = 0$ für alle endlich erzeugten Untermoduln U endlich präsentierter ${}_R P$. Das folgt aus der Exaktheit von $\text{Ext}_R^1(P, M) \rightarrow \text{Ext}_R^1(U, M) \rightarrow \text{Ext}_R^2(P', M)$, wobei $P' = P/U$ wieder endlich präsentiert ist. Der Schluß " $2') \Rightarrow 1)$ " ist klar.

" $1) \Rightarrow 2')$ " wird durch Induktion über die Anzahl m eines Erzeugendensystems von U gezeigt: Für $m=1$ ist die Behauptung vorausgesetzt. Wird U von $m+1$ Elementen erzeugt, dann sei $U = V + Ru$ mit von m Elementen erzeugtem V . In der exakten Folge $0 \rightarrow V \rightarrow U \rightarrow U/V \rightarrow 0$ ist U/V zyklischer Untermodul des endlich präsentierten Moduls $P' = P/V$, so daß aus der Exaktheit von $\text{Ext}_R^1(U/V, M) \rightarrow \text{Ext}_R^1(U, M) \rightarrow \text{Ext}_R^1(V, M)$ und der Induktionsvoraussetzung auch $\text{Ext}_R^1(U, M) = 0$ folgt.

Bemerkung: Es ist mir unbekannt, ob i.a. ein entsprechendes "Baersches Kriterium" auch für bloße absolute Reinheit existiert. Besitzt der Ring R eine Menge von Linksidealen $\underline{L}$, derart daß das Verschwinden von $\text{Ext}_R^1(R/L, X)$ für alle $L \in \underline{L}$ gerade die absolut reinen ${}_R X$ beschreibt, dann sind alle $L \in \underline{L}$ endlich erzeugt (Beweis ähnlich wie die Charakterisierung noetherscher Ringe); und ist ${}_R R$ kohärent, so ist $\underline{A}$ in 2.7 gleich der Menge der endlich erzeugten Linksideale.

3. Moduln über dem Endomorphismenring

3.1 Definition: Sei R ein beliebiger Ring. $-^*$ bezeichne die Funktoren $\text{Hom}_R(-, R): R\text{-Mod} \rightleftarrows \text{Mod-}R$. Ein Paar endlich präsentierter R -Moduln $({}_R P, Q_R)$ heiße ein duales Paar, wenn es exakte Folgen ${}_R R^m \xrightarrow{f} {}_R R^n \rightarrow {}_R P \rightarrow 0$ und $R^{n*} \xrightarrow{f^*} R^{m*} \rightarrow Q_R \rightarrow 0$ gibt ($m, n \in \mathbb{N}$).

Bemerkung: Da endlich erzeugte projektive Moduln X natürlich isomorph zu X^{**} , d.h. reflexiv sind, gibt es zu jedem endlich präsentierten Modul Q_R einen ebensolchen Modul ${}_R P$, so daß $({}_R P, Q_R)$ ein duales Paar wird - und umgekehrt. Ferner bestehen für ein solches Paar die exakten Folgen $0 \rightarrow Q^* \rightarrow R^m \xrightarrow{f} R^n \rightarrow P \rightarrow 0$ und $0 \rightarrow P^* \rightarrow R^n \xrightarrow{f^*} R^m \rightarrow Q \rightarrow 0$ ($R^{n*} \cong R^n$).

Folgendes Ergebnis stammt von M. Auslander [1; Prop. 6.3 & 7.1]

- ich gebe einen kurzen Beweis ad hoc an:

3.2 Satz: Sei R ein Ring, $({}_R P, Q_R)$ ein duales Paar endlich präsentierter R -Moduln und $X \in R\text{-Mod}$. Dann liefern die natürlichen Abbildungen folgende exakte Folgen abelscher Gruppen:

- 1) $0 \rightarrow \text{Ext}_R^1(P, X) \rightarrow Q \otimes_R X \rightarrow \text{Hom}_R(Q^*, X) \rightarrow \text{Ext}_R^2(P, X) \rightarrow 0$
- 2) $0 \rightarrow \text{Tor}_2^R(Q, X) \rightarrow P^* \otimes_R X \rightarrow \text{Hom}_R(P, X) \rightarrow \text{Tor}_1^R(Q, X) \rightarrow 0$.

Beweis: Man dualisiere die Folge $R^m \xrightarrow{f} R^n \xrightarrow{g} Q \rightarrow 0$ und erhält folgendes kommutative Diagramm mit exakter Zeile und Spalte:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \uparrow & & \\
 & & & & \text{Kok}(f^*) = P & & \\
 & & & & \uparrow & & \\
 (*) & & & & R^{m*} & & \\
 & & & & \uparrow j & & \\
 & & & & \text{Bi}(f^*) & & \\
 & & & & \uparrow & & \\
 0 & \rightarrow & Q^* & \xrightarrow{g^*} & R^{n*} & \rightarrow & 0
 \end{array}$$

$\nearrow f^*$

1) Auf das Diagramm (*) wende man $\text{Hom}_R(-, X)$ an und erhält unter Berücksichtigung der Transformation $-\otimes_R X \xrightarrow{t} \text{Hom}_R(-^*, X)$ folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(t) & \xrightarrow{\quad} & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 R^m \otimes_R X & \xrightarrow{f \otimes X} & R^n \otimes_R X & \xrightarrow{g \otimes X} & Q \otimes_R X & \xrightarrow{\quad} & 0 \\
 \downarrow \eta & \searrow \eta & \downarrow \eta & & \downarrow t & & \downarrow \eta \\
 & \text{Hom}(R^m, X) & & & & & \\
 \downarrow a & \swarrow a & \downarrow b & & \downarrow c & & \\
 0 \longrightarrow & \text{Hom}(\text{Bi}(f^*), X) & \longrightarrow & \text{Hom}(R^n, X) & \xrightarrow{c} & \text{Hom}(Q, X) & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 & \text{Kok}(a) & \longrightarrow & 0 & & \text{Kok}(t) & \\
 \downarrow & & & & & \downarrow & \\
 0 & & & & & 0 &
 \end{array}$$

Dabei ist $a = \text{Hom}(j, X)$, $b = \text{Hom}(f^*, X)$ und $c = \text{Hom}(g^*, X)$. Mit dem Schlangenlemma folgt $\text{Ker}(t) \cong \text{Kok}(a) \cong \text{Ext}^1(P, X)$. Ferner ist $\text{Kok}(t) = \text{Kok}(c) \cong \text{Ext}^1(\text{Bi}(f^*), X) \cong \text{Ext}^2(P, X)$.

Zum Beweis von 2) wende man auf das zu (*) analoge Diagramm für ${}_R P$ den Funktor $-\otimes_R X$ an unter Berücksichtigung der Transformation $-\otimes_R X \xrightarrow{\quad} \text{Hom}_R(-, X)$. Der Schluß erfolgt dann wie in 1).

3.3 Folgerung: Sei R ein Ring, dann gilt:

- 1) (E.R.Gentile[9;Th.1]) ${}_R R$ ist genau dann absolut rein, wenn alle endlich präsentierten Rechtsmoduln Q_R torsionslos sind.
- 2) $\text{Ext}_R^2(P, R) = 0$ gilt genau dann für alle endlich präsentierten Linksmoduln ${}_R P$, wenn die natürliche Abbildung $Q_R \longrightarrow Q_R^{**}$ für alle endlich präsentierten Rechtsmoduln Q_R surjektiv ist.
- 3) R besitzt genau dann die Eigenschaften 1) & 2), wenn ${}_R R$ (${}_R A \hookrightarrow {}_R R$)-injektiv ist für alle Annulatoren A von Elementen endlich präsentierter R -Linksmoduln.

Beweis: Für ein duales Paar $({}_R P, Q_R)$ besteht nach 3.2 die exakte Folge $0 \rightarrow \text{Ext}^1(P, R) \rightarrow Q \rightarrow Q^{**} \rightarrow \text{Ext}^2(P, R) \rightarrow 0$. Da es zu jedem P ein Q gibt und umgekehrt, folgen 1) und 2). Die Aussage 3) ist in 2.7 bewiesen.

Bemerkung: Ist r Element eines Rings R , so ist $(R/Rr, R/rR)$ ein duales Paar, und mit obiger Folge ist $\text{Ext}^1(R/Rr, R) \cong {}_R \mathcal{L}_R(r)/rR$; also ist ${}_R R$ genau dann $(Rr \hookrightarrow R)$ -injektiv, wenn ${}_R \mathcal{L}_R(r) = rR$ gilt (das ist [11; Th.1(i)]).

3.4 Beispiele links-absolut reiner Ringe sind neben links-injektiven Ringen und von Neumann-regulären Ringen (deren endlich präsentierte Moduln sind projektiv, also reflexiv) solche Ringe R , welche einen flachen Modul M_R besitzen, welcher alle endlich präsentierten Moduln Q_R koerzeugt (z.B. falls R_R Kogenerator in $\text{Mod-}R$ ist). Zum Beweis wende man das Kriterium 2.3 auf die Situation $M_R \cong \text{Hom}({}_R R_R, M_R)$ an.

Mit Hilfe der exakten Folgen aus 3.2 lassen sich leicht diejenigen Moduln charakterisieren, welche absolut rein bzw. (der Analogie halber) flach über ihrem Endomorphismenring sind. Dazu dient folgender

3.5 Hilfssatz: Sei $X \in \text{Mod-}R$ und $S = \text{End}(X_R)$. Dann gilt:

1) Zu $m, n \in \mathbb{N}$ und einem Homomorphismus $f: X_R^m \rightarrow X_R^n$ gibt es ein duales Paar endlich präsentierter S -Moduln $({}_S P, Q_S)$ und eine exakte Folge von R -Moduln $0 \rightarrow \text{Hom}_S(P, X) \rightarrow X^m \xrightarrow{f} X^n \rightarrow \underset{S}{Q} X \rightarrow 0$.

2) Zu vorgegebenem dualen Paar $({}_S P, Q_S)$ gibt es $f: X_R^m \rightarrow X_R^n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) und eine exakte Folge obiger Art.

Zum Beweis wende man die Paare von Funktoren $\text{Hom}_R(-, X), \text{Hom}_S(-, X)$ bzw. $\text{Hom}_R(X, -), - \otimes_S X$ auf f bzw. seine Transformierten an.

3.6 Satz: Sei R ein Ring, $X \in \text{Mod-}R$ und $S = \text{End}(X_R)$. Dann gilt:

1) ${}_S X$ ist genau dann absolut rein, wenn X_R den Kokern jedes Homomorphismus $X_R^m \rightarrow X_R^n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) koerzeugt.

2) ${}_S X$ ist genau dann flach, wenn X_R den Kern jedes Homomorphismus $X_R^m \rightarrow X_R^n$ erzeugt (es genügt die Bedingung mit $n=1$).

Beweis: 1) Wegen $S = \text{End}(X_R)$ besteht für jeden Modul Q_S das kommutative Diagramm der kanonischen Abbildungen:

$$\begin{array}{ccc} Q \otimes_S X & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}_S(Q^*, X) \\ & \searrow & \swarrow \cong \\ & \text{Hom}_S(\text{Hom}_R(Q \otimes_S X, X), X) & \end{array}$$

Daraus folgt mit 3.2,1), daß ${}_S X$ genau dann absolut rein ist, wenn X_R die R -Moduln $Q \otimes_S X$ für alle endlich präsentierten Q_S koerzeugt - diese sind aber nach 3.5 gerade die erwähnten Kokerne.

2) Wieder wegen $S = \text{End}(X_R)$ hat man zu jedem Modul ${}_S P$ das kommutative Diagramm $P^* \otimes_S X \xrightarrow{\quad} \text{Hom}_S(P, X)$.

$$\begin{array}{ccc} P^* \otimes_S X & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}_S(P, X) \\ & \searrow \cong & \swarrow \\ & \text{Hom}_R(X, \text{Hom}_S(P, X)) \otimes_S X & \end{array}$$

Mit 3.2,2) und 3.5 folgt dann die Aussage durch analogen Schluß.

4. Einige Eigenschaften absolut reiner Ringe

4.1 Bezeichnungen: Für einen Modul X sei

- 1) $\text{Ra}(X)$ sein Radikal = Durchschnitt aller maximalen Untermoduln von X = Summe aller kleinen Untermoduln von X .
- 2) $\text{So}(X)$ sein Sockel = Summe aller einfachen Untermoduln = Durchschnitt aller großen Untermoduln.
- 3) $\text{Si}(X)$ sein singulärer Untermodul = Menge derjenigen Elemente aus X , deren Annullator großer Untermodul des Grundrings ist.

4.2 Hilfssatz: Sei R ein Ring und $\underline{A} = \{ \ell_R(x) / x \in_R P \text{ endl. präs.} \}$.

Dann gilt: 1) Für alle $r \in R$ ist $Rr \in \underline{A}$ & $\ell_R(r) \in \underline{A}$.

2) Mit $A, B \in \underline{A}$ sind auch $A \cap B$ & $A+B \in \underline{A}$.

3) Ist ${}_R R$ absolut rein, dann ist $\mathcal{V}_R(A \cap B) = \mathcal{V}_R(A) + \mathcal{V}_R(B)$ für alle $A, B \in \underline{A}$.

Beweis: 1) ist klar.

2) $A \cap B \in \underline{A}$ gilt, weil die Klasse $\underline{EP}$ der endlich präsentierten R -Linksmoduln abgeschlossen gegenüber endlichen direkten Summen ist. $A+B \in \underline{A}$ gilt, weil mit $P \in \underline{EP}$ und einem endlich erzeugten Untermodul U von P auch P/U in $\underline{EP}$ liegt: Es besteht das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow R/(A \cap B) & \longrightarrow & R/A \oplus R/B & \longrightarrow & R/(A+B) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow j & & \downarrow \\
 0 \longrightarrow U & \longrightarrow & P & \longrightarrow & P' & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Dabei sind $P, P' \in \underline{EP}$, j injektiv, also auch $\dashrightarrow$ injektiv.

3) Man betrachte den Monomorphismus $f = (R/A \xrightarrow{d} R/A \oplus R/B \xrightarrow{j} P)$:

Da ${}_R R$ absolut rein ist, wird $f^* = d^* j^*$ surjektiv, also auch

d^* - das ist gleichbedeutend mit der Aussage 3).

4.3 Folgerung: Sei r Element des absolut reinen Rings ${}_R R$.

Dann gilt: 1) Ist xR $\perp$ -Komplement von rR in ${}_R R$, so ist

$$\ell_R(x) \cap \text{-Komplement von } \ell_R(r).$$

2) Besitzt $\ell_R(r)$ ein $\cap$ -Komplement C , welches

in $\underline{A}$ liegt (s.4.2), dann ist $\mathcal{H}_R(C)$ $\perp$ -Komplement

von rR und $C = \ell_R(x)$ mit einem $x \in R$.

Beweis:

1) Aus $xR + rR = R$ folgt $\ell_R(x) \cap \ell_R(r) = 0$. Sei $C = \ell_R(x) + rR$ mit einem $c \in R$, dann ist nach 4.2 $C \in \underline{A}$. Ist $C \cap \ell_R(r) = 0$, so folgt mit 4.2 $R = \mathcal{H}_R(C) + \mathcal{H}_R \ell_R(r) = \mathcal{H}_R(C) + rR$ - letztere Gleichung nach 3.3, weil R/rR torsionslos ist. Andererseits ist $\mathcal{H}_R(C) \subset \mathcal{H}_R \ell_R(x) = xR$, wegen der Minimalität von xR daher $\mathcal{H}_R(C) = xR$ und $C \subset \ell_R(x)$ und schließlich $C = \ell_R(x)$.

2) Aus $C \cap \ell_R(r) = 0$ folgt mit 4.2 & 3.3 $R = \mathcal{H}_R(C) + \mathcal{H}_R \ell_R(r) = \mathcal{H}_R(C) + rR$. Sei B_R endlich erzeugt und in $\mathcal{H}_R(C)$ enthalten mit $B + rR = R$. Dann folgt $0 = \ell_R(B) \cap \ell_R(r)$ und $C \subset \ell_R(B)$; wegen der Maximalität von C wird $\ell_R(B) = C$, daraus wieder $B = \mathcal{H}_R \ell_R(B) = \mathcal{H}_R(C)$. Also ist $\mathcal{H}_R(C)$ $\perp$ -Komplement von rR , daher zyklisch, $\mathcal{H}_R(C) = xR$ mit einem $x \in R$, und es wird $C = \ell_R \mathcal{H}_R(C) = \ell_R(x)$.

4.4 Satz: Für einen links-absolut reinen Ring R gilt

$$Ra(R) = Si({}_R R) \text{ und } So({}_R R) \subset So(R_R) .$$

Beweis:

- 1) Nach 4.3 ist für ein Element $r \in R$ rR genau dann klein in R_R , wenn $\ell_R(r)$ groß in ${}_R R$ ist. Also folgt $Ra(R) = Ra(R_R) = Si({}_R R)$.
- 2) Sei Rx einfacher Untermodul von ${}_R R$ und $0 \neq yR \subset xR$. Dann ist $\ell_R(y) = \ell_R(x)$, denn $\ell_R(x)$ ist maximales Linksideal. Mit 3.3 folgt $yR = \mathcal{U}_R \ell_R(y) = \mathcal{U}_R \ell_R(x) = xR$. Also ist xR_R einfach.

4.5 Satz: Für einen links-absolut reinen Ring R sind äquivalent:

- 1) $R/Ra(R)$ ist von Neumann-regulär und Idempotente modulo $Ra(R)$ lassen sich liften (d.h. R ist "f-semiperfekt").

Jeder Linksannullator $\ell_R(r)$ eines Elements $r \in R$

- 2) besitzt ein $\cap$ -Komplement, das in $\{\ell_R(x) \mid x \in R^P \text{ endl.präs.}\}$ liegt,
- 3) ist großer Untermodul eines von einem Idempotent $e \in R$ erzeugten Linksideals Re .

Beweis: Da ${}_R R$ absolut rein ist, wird die Bedingung 2) vermöge

4.3 äquivalent zu 2'): Jedes zyklische Rechtsideal rR besitzt ein $+$ -Komplement - diese Bedingung ist aber äquivalent zu 1).

"3) $\Rightarrow$ 2)" ist klar, denn $R(1-e)$ ist $\cap$ -Komplement von $\ell_R(r)$.

Zum Schluß "1) $\Rightarrow$ 3)" benütze ich folgende Tatsache: Jedes $+$ -Komplement in einem f-semiperfekten Ring ist direkter Summand. Sei

also $f = f^2 \in R$, derart daß fR minimal bzgl. $fR + rR = R$ ist.

Dann ist nach 4.3,1) die Abbildung $g: L = \ell_R(r) \ni x \mapsto xf \in Rf \cong$

$R/R(1-f)$ wesentlicher Monomorphismus. Seien ferner $a, b \in R$ mit

$1 = fa + rb$ und $h = (Rf \ni y \mapsto ya \in R)$. Dann ist $(L \hookrightarrow R) = hg$,

daher h Monomorphismus. Da $Bi(h) \cong Rf$ endlich erzeugt und absolut rein ist, wird $Bi(h) = Re$ mit einem Idempotent $e \in R$. Ferner ist L groß in Re .

4.6 Zwei Beispiele:

1) Ein Beispiel eines links-absolut reinen f -semiperfekten (weder injektiven noch regulären) Rings R ist B.L.Osofsky's Beispiel eines nicht-injektiven Rings R , welcher Kogenerator in $\text{Mod-}R$ ist [16; Example 2, p.379]: Wie man leicht verifiziert, ist $R = S \oplus J$ mit $J = \text{Ra}(R)$ und einem kommutativen regulären Unterring S . Da R_R Kogenerator ist, wird R_R absolut rein (3.4). Da $S \hookrightarrow R \twoheadrightarrow R/J$ ein Ring-Isomorphismus ist, wird R f -semiperfekt.

2) Ein Beispiel eines kommutativen absolut-reinen Rings R , welcher nicht f -semiperfekt ist, dafür aber kohärent & skalar, erhält man auf folgende Weise: (in Anlehnung an [16; Example 1])

Sei $R = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ als additive Gruppe mit der Multiplikation $(a,x)(b,y) = (ab, ay+bx)$. Dann ist $J = (0, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ein Ideal von R mit $J^2 = 0$ und $R/J \cong \mathbb{Z}$, also $J = \text{Ra}(R)$. Die technischen Details sind folgende:

- a) Jedes endlich erzeugte Ideal I von R ist zyklisch, nämlich von der Form $R(a,0)$ mit $a \in \mathbb{Z}$ oder $R(0,x)$ mit $x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ - das folgt aus der Tatsache, daß $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ teilbar ist, bzw. daß jede endlich erzeugte Untergruppe von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ zyklisch ist.
- b) Der Durchschnitt zweier Hauptideale von R ist wieder Hauptideal - weil die endlich erzeugten Untergruppen von $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ diese Eigenschaft haben.
- c) Die Annulatoren von Elementen aus R sind zyklisch - weil $\mathbb{Z}$ Hauptidealring ist, bzw. die Annulatoren in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ von Null verschiedener Elemente aus $\mathbb{Z}$ zyklisch sind. Damit ist R kohärent.
- d) R genügt der Annulatorbedingung für Hauptideale, weil $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$ -Kogenerator ist, bzw. der Annulatorbedingung (bzgl. $\mathbb{Z}$) für zyklische Untergruppen genügt. Daher wird $\text{Ext}^1(R/I, R) = 0$

für endlich erzeugte Ideale I von R (Bemerkung im Anschluß an 3.3). Weil nun R kohärent ist, wird vermöge 2.7 R absolut rein, denn die Idealmenge $\underline{A}$ ibidem wird die Menge der endlich erzeugten Ideale von R .

e) Daß R skalar ist, d.h. bis auf Isomorphie alle einfachen R -Moduln enthält, ergibt sich aus folgendem Argument: Jeder einfache R -Modul wird von J annulliert, ist daher ein einfacher Z -Modul (via $R \rightarrow Z$), damit Z -linear in J enthalten, und diese Inklusion ist wegen $J^2 = 0$ R -linear.

4.7 Satz: Das Zentrum eines absolut reinen und radikalfreien Rings ist von Neumann-regulär.

Beweis:

Sei der Ring R_R absolut rein. Sei $Z(R)$ sein Zentrum und S sein maximaler Rechtsquotientenring. Dann ist $Z(R)$ im Zentrum $Z(S)$ von S enthalten. Nach Voraussetzung und 4.4 ist $0 = Ra(R) = Si(R_R)$. Daher ist S ein von Neumann-Ring (etwa J.Lambek [14; p.106]), also auch $Z(S)$. Ist nun $z \in Z(R)$, so gibt es ein $s \in Z(S)$ mit $z = sz^2$. Andererseits ist R_R reiner Untermodul von S_R , daher gibt es ein $r \in R$ mit $z = sz^2 = rz^2$. Es folgt $z = rz^2 = r(rz^2)z = tz^2$ mit $t = r^2z$. Es bleibt zu zeigen, daß t in $Z(R)$ liegt:

Dazu sei $x \in R$, dann wird $(xt-tx)z^2 = x(tz^2) - (tz^2)x = 0$. Also liegt $xt-tx$ in $\ell_R(z^2) = \ell_R(z)$ und es wird $0 = (xt-tx)z = (xr^2 - r^2x)z^2$, daraus wieder $0 = (xr^2 - r^2x)z = xt-tx$.

Folgerung: Ein kommutativer semiprimär & absolut reiner Ring ist von Neumann-regulär.

Gäbe es nämlich ein $0 \neq x \in Ra(R) = Si(R)$, so enthielte $Rx \cap \mathcal{N}_R(x)$ von 0 verschiedene nilpotente Elemente.

5. Fläche injektive Moduln

Vorbemerkung: G.Sabbagh ([17; Théorème 2]) hat Resultate von B.T.Stenström ([18; Prop. 4.2]) zu folgender Aussage erweitert:

5.1 Satz: Für einen Ring R sind folgende Eigenschaften äquivalent:

- 1) "absolut rein = flach" in $\text{Mod-}R$.
- 2) "absolut rein = flach" in $R\text{-Mod}$.
- 3) ${}_R R$ und R_R sind kohärent und absolut rein .

Wie sich leicht zeigen lässt, ist zu obigen Eigenschaften noch folgende äquivalent:

- 4) Jeder injektive R -Links- oder R -Rechtsmodul ist flach.

Es liegt daher die Frage nach einer Charakterisierung derjenigen Ringe nahe, deren injektive Linksmoduln flach sind. Eine solche "Halbierung" von G.Sabbaghs Theorem lässt sich mit Hilfe eines verallgemeinerten Kohärenzbegriffs formulieren, wie ihn R.Desq ([7]) angegeben hat.

5.2 Definitionen: Sei R ein Ring & I_R seine rechts-injektive Hülle.

- 1) Ein Untermodul U eines R -Rechtsmoduls X heißt dicht in X , wenn $\text{Hom}_R(X/U, I) = 0$ ist.
- 2) ([7; Déf. 3.2]) Ein Modul X_R heißt fast endlich erzeugt, wenn er einen dichten endlich erzeugten Untermodul enthält.
- 3) ([7; Déf. 3.4]) Ein Modul X_R heißt fast endlich präsentiert, wenn es eine exakte Folge $0 \rightarrow U_R \rightarrow R_R^m \rightarrow X_R \rightarrow 0$ gibt mit $m \in \mathbb{N}$ und fast endlich erzeugtem U_R .

Folgenden Satz hat mir Herr R.Desq mitgeteilt, die Beweismethode ist im wesentlichen die von [7,4,5] .

5.3 Satz: Für einen Ring R sind folgende Eigenschaften äquivalent:

- 1) Jeder endlich erzeugte Untermodul U eines freien (bzw. endlich präsentierten) Rechtsmoduls F_R ist fast endl.präsentiert.
- 2) Der Duale P_R^* jedes endlich präsentierten Linksmoduls ${}_R P$ ist fast endlich erzeugt.
- 3) Alle Annullatoren $\mathcal{W}_R(x)$ von Elementen x endlich präsentierter Rechtsmoduln Q_R sind fast endlich erzeugt.
- 4) Jeder Rechtsannullator $\mathcal{W}_R(r)$ eines Elements $r \in R$ ist fast endlich erzeugt, und der Durchschnitt zweier endlich erzeugter Untermoduln eines freien R -Rechtsmoduls ist fast endlich erzeugt.

Zum Beweis dient folgender

5.4 Hilfssatz: Sei $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ exakt in $\text{Mod-}R$, dann gilt:

- 1) Ist B fast endlich erzeugt, so auch C .
- 2) Sind A und C fast endlich erzeugt, dann auch B .
- 3) Ist C fast endlich präsentiert und B fast endlich erzeugt, so ist A fast endlich erzeugt.

Beweis:

- 1) Ist V ein endlich erzeugter dichter Untermodul von B , dann ist $g(V)$ dicht in C .
- 2) Sind U bzw. W endlich erzeugt und dicht in A bzw. C , und ist W' endlich erzeugter Untermodul von B mit $g(W') = W$, so ist $V := f(U) + W'$ dicht in B .

3) ergibt sich aus folgendem kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \rightarrow 0 \\ & & \uparrow k & & \uparrow h & & \uparrow 1 \\ 0 & \rightarrow & K & \rightarrow & F & \rightarrow & C \rightarrow 0 \end{array}$$

Weil C endlich erzeugt ist, enthält B einen dichten endlich erzeugten Untermodul V mit $g(V) = C$. Sei F frei & endlich erzeugt mit $Bi(h) = V$ und $K = \text{Ker}(gh)$. Dann ist $\text{Kok}(k) \cong \text{Kok}(h)$, daher $Bi(k)$ dicht in A . Andererseits gibt es eine exakte Folge $0 \rightarrow L \rightarrow G \rightarrow C \rightarrow 0$ mit endlich erzeugtem freien G und fast endlich erzeugtem L . Schanuel's Lemma ([12; p.167]) liefert $K \otimes G \cong L \otimes F$; nach 1) ist daher K fast endlich erzeugt als Faktor eines ebensolchen Moduls, also ist auch $Bi(k)$ fast endlich erzeugt und schließlich auch A ("dicht in" ist transitiv).

Beweis von 5.3 :

"1) $\Leftrightarrow$ 2)": Nach 3.1 gibt es zu jedem endlich erzeugten Untermodul U eines freien Moduls F_R einen endlich präsentierten Modul ${}_R P$ und eine exakte Folge $0 \rightarrow P^* \rightarrow R^m \rightarrow U \rightarrow 0$ ($m \in \mathbb{N}$); ferner zu jedem P geeignete U , F und obige Folge. Mit 5.4,3) folgt somit die Behauptung.

Sei 1') die in Klammern stehende Version von 1).

"1) $\Rightarrow$ 1')": In der exakten Folge $0 \rightarrow U \rightarrow F \rightarrow Q \rightarrow 0$ ist auch $Q^* := F/U$ endlich präsentiert. Bildet man die exakte Folge $0 \rightarrow K_1 \rightarrow K_2 \rightarrow K_3 \rightarrow 0$ der Kerne einer simultanen projektiven Erweiterung aus endlich erzeugten Freien von U, F, Q , so ist daher K_3 nach Voraussetzung fast endlich präsentiert, ferner K_2 endlich erzeugt, nach 5.4,3) also K_1 fast endlich erzeugt, und somit U fast endlich präsentiert.

"3) $\Rightarrow$ 1'": Nach Voraussetzung ist jeder zyklische Untermodul eines endlich präsentierten Rechtsmoduls fast endlich präsentiert. Durch Induktion über die Anzahl eines Erzeugendensystems folgt mit Hilfe von 5.4,2) diese Eigenschaft für alle endlich erzeugten Untermoduln (Methode wie in "1) $\Rightarrow$ 1'").

"1' $\Rightarrow$ 4)": Mit 5.4,3) ist $\mathcal{U}_R(r)$ fast endlich erzeugt. Sind U, V endlich erzeugte Untermoduln des freien endlich erzeugten Moduls F_R , so ist $F/(U \cap V)$ endlich erzeugter Untermodul eines endlich präsentierten, daher fast endlich präsentiert. Mit 5.4,3) wird daher $U \cap V$ fast endlich erzeugt.

"4) $\Rightarrow$ 3)": Sei F_R frei & endlich erzeugt mit $x \in F$. Dann ist $\mathcal{U}_R(x)$ fast endlich erzeugt - das folgt aus der Voraussetzung und der Tatsache, daß mit A_i dicht in B_i auch $\bigcap_{\text{endl.}} A_i$ dicht in $\bigcap_{\text{endl.}} B_i$ ist. Sei nun U ein endlich erzeugter Untermodul von F_R und $\bar{x}$ die Restklasse von x in $Q_R := F/U$. Dann ist $\mathcal{U}_R(\bar{x}) = (U:x) = \{ r \in R / xr \in U \}$ und es besteht die exakte Folge $0 \longrightarrow \mathcal{U}_R(x) \longrightarrow (U:x) \xrightarrow{f} U \cap xR \longrightarrow 0$, wobei $f = (r \mapsto xr)$ ist. Nun ist nach Voraussetzung $U \cap xR$ fast endlich erzeugt, nach 5.4,2) daher auch $(U:x)$ q.e.d.

5.5 Definition: Ein Ring R mit den äquivalenten Eigenschaften von 5.3 möge rechts-fast kohärent heißen.

Bemerkung: Hier bleibt einiges offen - so z.B. die Frage, ob es in 5.3,4) bereits genügt zu fordern, daß der Durchschnitt zweier endlich erzeugter Rechtsideale fast endlich erzeugt ist (dies ist nach [4] der Fall, wenn $\text{Si}(R_R) = 0$ ist). Auch fehlt ein Analogon zur Charakterisierung rechts-kohärenter Ringe durch die Flachheit der Produkte flacher Linksmoduln.

Nun die angekündigte Verallgemeinerung von 5.1 :

5.6 Satz: Für einen Ring R sind folgende Eigenschaften äquivalent:

- 1) Jeder injektive (bzw. absolut reine) R -Linksmodul ist flach.
- 2) Jeder endlich präsentierte R -Linksmodul ist in einem freien (bzw. flachen) Modul enthalten.
- 3) R ist rechts-absolut rein und rechts-fast kohärent.

Beweis: $1')$ und $2')$ mögen die in Klammern stehenden Versionen von 1) und 2) sein. Es ist klar, daß " $1') \Rightarrow 1) \Rightarrow 2')$ " gilt.

" $2') \Rightarrow 2)$ ": Sei ${}_R P$ endlich präsentierte, $f: {}_R P \rightarrow {}_R X$ ein Monomorphismus mit flachem ${}_R X$ und $g: {}_R F \rightarrow {}_R X$ ein Epimorphismus mit freiem ${}_R F$. Dann ist $\text{Ker}(g)$ reiner Untermodul von ${}_R F$ (1.3), daher gibt es nach 1.1,3) ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ h \swarrow & \downarrow f & \\ F & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

worin h Monomorphismus ist.

" $2) \Rightarrow 1')$ ": Sei ${}_R X$ absolut rein und ${}_R F \xrightarrow{f} {}_R X \rightarrow 0$ exakt mit freiem ${}_R F$. Es ist zu zeigen, daß $\text{Ker}(f)$ rein in F ist - dann ist ${}_R X$ flach (1.3). Zu diesem Zweck sei ein ${}_R P \xrightarrow{g} {}_R X$ mit endlich präsentierte ${}_R P$ gegeben. Nach Voraussetzung existiert dann eine exakte Folge $0 \rightarrow {}_R P \xrightarrow{j} {}_R G$ mit freiem ${}_R G$. Daraus gewinnt man ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{j} & P & \hookrightarrow & 0 \\ g_2 \downarrow & \swarrow g_1 & \downarrow g & & \\ F & \xrightarrow{f} & X & \rightarrow & 0 \end{array}$$

mit $g = g_1 j$ und $g_1 = f g_2$,

also $g = f(g_2 j)$ - dies ist

das Kriterium der Reinheit von $\text{Ker}(f)$ in F (1.1,3)).

"3) $\Rightarrow$ 2)": Ist R_R absolut rein, dann ist jeder endlich präsentierte ${}_R P$ torsionslos (3.3), d.h. $\text{Ker}(P \rightarrow P^{**}) = 0$. Der Rest ergibt sich aus folgender

5.7 Bemerkung: Sei R_R fast kohärent, ${}_R P$ endlich präsentiert und $K = \text{Ker}(P \rightarrow P^{**})$. Dann gibt es eine exakte Folge $0 \rightarrow P/K \rightarrow {}_R R^n$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Nach 5.3,2) ist P_R^* fast endlich erzeugt, also gibt es $f_1, \dots, f_n \in P^*$, so daß $U_R = \sum_{i=1}^n f_i R$ dicht in P_R^* ist. Sei $L = \bigcap_i \text{Ker}(f_i)$, dann ist $K \subset L$. Gäbe es ein $x \in L - K$, dann wäre $U(x) = 0$ und $g(x) \neq 0$ für ein $g \in P^*$. Daher gäbe es den von Null verschiedenen Homomorphismus $(U + gR)/U \ni \bar{g} \mapsto g(x) \in R$, und U wäre nicht dicht in P^* . Also ist $K = L = \text{Ker}(h)$ mit $h = (f_1, \dots, f_n): {}_R P \rightarrow {}_R R^n$.

"2) $\Rightarrow$ 3)": Zunächst ist R_R absolut rein, denn jeder endlich präsentierte ${}_R P$ ist als Untermodul eines Freien torsionslos (3.3). Daß R_R fast kohärent ist, folgt mit 5.3,2) aus Teil 2) der folgenden Aussage:

5.8 Hilfssatz: Sei der Ring R_R absolut rein und ${}_R X$ endlich endlich erzeugt. Dann gilt:

- 1) Ist U endlich erzeugter Untermodul von X_R^* , so ist die kanonische Abbildung ${}_R X \rightarrow {}_R X^{**} \rightarrow {}_R U^*$ surjektiv.
- 2) Ist X Untermodul eines freien Moduls, dann ist X reflexiv und X_R^* fast endlich erzeugt.

Beweis:

1) Man dualisiere eine exakte Folge $R^{\mathbb{N}} \xrightarrow{h} R^{\mathbb{N}} \rightarrow 0$ ($n \in \mathbb{N}$) und erhält den Monomorphismus $j = (U_R \xrightarrow{i} X_R^* \xrightarrow{h^*} R^{\mathbb{N}*})$. Nochmaliges Dualisieren ergibt das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} R^{\mathbb{N}*} & \xrightarrow{h^{**}} & X^{**} & \xrightarrow{i^*} & U^* \\ \uparrow m & & \uparrow & & \\ R^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{h} & X & & \end{array} \quad . \text{ Da } R_R \text{ absolut rein ist, wird } j^* = i^* h^{**} \text{ surjektiv, also auch } X \rightarrow X^{**} \rightarrow U^* .$$

2) Sei nun $R^X \subset R^{\mathbb{N}}$ ($m \in \mathbb{N}$); dann gibt es $f_1, \dots, f_m \in X^*$ mit

$$\bigcap_{k=1}^m \text{Ker}(f_k) = 0 . \text{ Sei } U_R = \sum_k f_k R \xrightarrow{i} X_R^* . \text{ Nach 1) ist dann}$$

die kanonische Abbildung $X \rightarrow X^{**} \xrightarrow{i^*} U^*$ ein Isomorphismus.

Ist V_R endlich erzeugt mit $U \subset V \subset X^*$, so besteht das kommutative Diagramm $X \xrightarrow{\cong} U^*$, wobei nach 1) wieder $X \rightarrow V^*$ surjektiv ist.

Also ist $V^* \rightarrow U^*$ ein Isomorphismus. Andererseits ist die Folge $0 \rightarrow (V/U)^* \rightarrow V^* \rightarrow U^*$ exakt, daher $(V/U)^* = 0$. Das bedeutet aber gerade, daß U dicht in X^* ist.

Ferner ist R^X reflexiv: Mit obigem $U \xrightarrow{i} X^*$ ist $X^{**} = \text{Bi}(X \rightarrow X^{**}) \oplus \text{Ker}(i^*)$. Da aber $0 \rightarrow (X^*/U)^* \rightarrow X^{**} \xrightarrow{i^*} U^*$ exakt und $(X^*/U)^* = 0$ ist, folgt $X \xrightarrow{\cong} X^{**}$.

Damit ist 5.6 bewiesen. Der Zusammenhang mit 5.1 ergibt sich aus folgender

5.9 Bemerkung: Sei der Ring R_R absolut rein. Dann ist jeder fast endlich präsentierte Rechtsmodul X_R endlich präsentiert. Insbesondere ist R_R kohärent, falls R_R fast-kohärent ist.

Beweis:

Sei $X = R^{\mathbb{N}}/U$ mit $U_R \subset R_R^{\mathbb{N}}$ ($n \in \mathbb{N}$) und einem endlich erzeugten dichten Untermodul V von U_R . Dann ist $Y_R = R^{\mathbb{N}}/V$ endlich präsentiert, daher torsionslos (3.3). Also ist U/V torsionslos und damit Null.

5.10 Bemerkung: Zur Bedingung 3) in 5.6 ist noch folgende äquivalent: 3') R_R ist fast-kohärent und $(B \rightarrow R)$ -injektiv für alle endlich erzeugten Rechtsideale B von R .
Denn aus 3') folgt, daß auch $\text{Ext}^1(R/A, R) = 0$ ist für alle fast endlich erzeugten Rechtsideale A . Mit 5.3,3) und 2.7 wird daher $\text{Ext}^n(Q, R) = 0$ für $n=1 \& 2$ und alle endlich präsentierten Q_R .

5.11 Folgerung: Der Ring R sei rechts-absolut rein und rechts-fast-kohärent. Dann gilt:

- 1) Jeder endlich präsentierte R -Linksmodul ist reflexiv.
- 2) Jeder flache R -Rechtsmodul ist absolut rein.
- 3) Jeder R -Linksmodul X hat $\text{e.p.inj.dim.}(X) = 0$ oder ∞ ; und jeder R -Rechtsmodul hat die schwache Dimension 0 oder ∞ .

Beweis:

- 1) Die Bedingung 1) ist nach 3.3,3) stets äquivalent zur Bedingung $\text{Ext}^n(Q, R) = 0$ für $n=1 \& 2$ und alle endlich präses. Q_R .
- 2) Ist X_R flach, dann ist ${}_R X^+ = \text{Hom}_Z(X, Q/Z)$ injektiv, nach 5.6 daher flach. Also ist X_R absolut rein (2.3). (Es ist mir unbekannt, ob aus dieser Bedingung 2) bereits folgt, daß R rechts-fast-kohärent ist.)
- 3) $\text{e.p.inj.dim.}(X)$ bezeichnet nach [18; p.325] die kleinste ganze Zahl $n \gg 0$, derart daß $\text{Ext}^{n+1}(P, X) = 0$ ist für alle endlich präsentierten ${}_R P$, bzw. ∞ , falls es kein solches n gibt. Ist nun $n \gg 1$ mit obiger Eigenschaft gegeben und ${}_R P'$ endlich präsentiert, dann gibt es nach 5.6 eine exakte Folge $0 \rightarrow P' \rightarrow F \rightarrow P \rightarrow 0$ mit freiem F und endlich präsentiertem P . Also ist $\text{Ext}^n(P', X) \cong \text{Ext}^{n+1}(P, X) = 0$. Der Rest der Behauptung folgt aus der Dualitätsformel [3; p.120]
 $\text{Ext}({}_R P, {}_R Y^+) \cong (\text{Tor}({}_R Y, {}_R P))^+$.

6. Eine Bemerkung über flache Quotientenringe

Es geht um eine Verallgemeinerung folgendes Satzes von V.C. Cateforis [4 ; Theorem 2.1 & 2.2] :

6.1 Satz: Sei R ein Ring mit $\text{Si}(R_R) = 0$ und S ein von Neumann-regulärer Rechtsquotientenring von R (z.B. der maximale). Dann ist ${}_R S$ genau dann flach, wenn R_R fast kohärent ist.

Nach [7 ; Théorème 3.7] impliziert bereits die Existenz eines rechts-semihereditären links-flachen Rechtsquotientenrings S des vorgegebenen Rings R , daß $\text{Si}(R_R) = 0$ und R_R fast kohärent ist. Mit Hilfe der Methoden aus [7] lässt sich nun folgender Befreiungsversuch von der Bedingung " $\text{Si}(R_R) = 0$ " unternehmen:

6.2 Satz: Sei R ein Unterring des Rings S . Dann gilt:

- 1) Ist S Rechtsquotientenring von R , ${}_S S$ absolut rein und R_R fast kohärent, so ist ${}_R S$ flach.
- 2) Ist ${}_R S$ flach und ${}_S S$ fast kohärent, dann ist R_R fast kohärent.

Zum Beweis zunächst einige Erinnerungen:

1) Sei $\underline{D}$ die Menge der dichten Rechtsideale von R und $\text{To}(X_R)$ die Menge derjenigen Elemente des Moduls X_R , deren Annulator in $\underline{D}$ liegt. Dann ist To ein linksexakter Unterfunktork der Identität von $\text{Mod-}R$ mit $\text{To}(X/\text{To}(X)) = 0$ (ein "Torsionsradikal") und $\text{To}(R_R) = 0$. Ferner gilt $\text{To} \subset \text{Si}$ in $\text{Mod-}R$. Gleichheit findet genau dann statt, wenn $\text{Si}(R_R) = 0$ ist.

- 2) Ein Ring S heißt Rechtsquotientenring von R , wenn R Unterring von S ist, $\text{To}(S_R) = 0$ und R_R dicht in S_R ist. Eine äquivalente Charakterisierung ist: S ist Unterring des maximalen Rechtsquotientenrings $S_{\max}$ von R und enthält R . Dabei ist $S_{\max} = \text{Bikommulator}(I_R)$ mit der injektiven Hülle I_R von R_R . Ferner besteht eine natürliche Inklusion $R \subset S \subset I$, so daß $S_S \hookrightarrow I_S$ injektive Hülle ist.
- 3) Bezeichnet $\underline{D}'$ die Menge der dichten Rechtsideale von S , so ist mit $A \in \underline{D}$ auch $AS \in \underline{D}'$ und aus $B \in \underline{D}'$ folgt $B \cap R \in \underline{D}$. Ist To' der durch $\underline{D}'$ definierte Funktor in $\text{Mod-}S$, so gilt daher $\text{To}'(Y_S) = \text{To}(Y_R)$ für jeden S -Modul Y .

6.3 Hilfssatz: Sei S ein Rechtsquotientenring des Rings R , dann gilt: 1) Für jeden Untermodul A eines Freien F_R ist

$$\text{Ker}(\underset{R}{AQS} \xrightarrow{\underset{R}{f}} \underset{R}{FQS}) = \text{To}(\underset{R}{AQS}) .$$

- 2) Ein R -Modul X_R ist genau dann fast endlich erzeugt, wenn der S -Modul $\underset{R}{XQS}$ fast endlich erzeugt ist.
- 3) Ein endlich erzeugter R -Modul X_R ist genau dann fast endlich präsentiert, wenn der S -Modul $\underset{R}{XQS}$ fast endlich präsentiert ist.

Beweis: 1) bzw. 2) sind [7; Lemme 2.1 bzw. Prop. 3.3] .

3) Ist X_R fast endlich präsentiert, so gibt es eine exakte Folge $0 \rightarrow U_R \xrightarrow{j} R_R^m \rightarrow X_R \rightarrow 0$ mit $m \in \mathbb{N}$ und fast endlich erzeugtem U_R . Daraus erhält man die exakte Folge $\underset{R}{UQS} \xrightarrow{\underset{R}{jQS}} \underset{R}{S^m} \rightarrow \underset{R}{XQS} \rightarrow 0$ (+).

Nach 2) ist $\underset{R}{UQS}$ fast endlich erzeugt, also auch jeder Faktor dieses S -Moduls, und $\underset{R}{XQS}$ ist fast endlich präsentiert.

Sei nun $X_{R,S}$ fast endlich präsentiert, dann gibt es eine exakte Folge $0 \rightarrow V_S \rightarrow S_S^n \rightarrow X_{R,S} \rightarrow 0$ mit $n \in \mathbb{N}$ und fast endlich erzeugtem V_S . Andererseits hat man eine Folge (+) mit gewissem U_R . Schanuels Lemma ergibt $\text{Bi}(j_{\mathbb{Q}S})_{\mathbb{Q}S^n} \cong V_{\mathbb{Q}S^m}$. Dabei ist $V_{\mathbb{Q}S^m}$ fast endlich erzeugt, also auch $\text{Bi}(j_{\mathbb{Q}S})$. Nach 1) ist aber $\text{Ker}(j_{\mathbb{Q}S}) = \text{To}(U_{\mathbb{Q}S})$. Mit $Y_S = U_{\mathbb{Q}S}$ sind daher in der exakten Folge $0 \rightarrow \text{To}(Y) \rightarrow Y \rightarrow Y/\text{To}(Y) \rightarrow 0$ die Moduln $\text{To}(Y)$ und $Y/\text{To}(Y)$ fast endlich erzeugt, nach 5.4, 2) somit auch Y_S und nach 2) schließlich auch U_R - d.h. X_R ist fast endlich präsentiert.

Beweis von 6.2:

1) Sei A ein endlich erzeugtes Rechtsideal von R , dann ist A_R nach Voraussetzung fast endlich präsentiert, nach 6.3, 3) daher auch der S -Modul $A_{\mathbb{Q}S}$. Da S absolut rein ist, folgt mit 5.9, daß $A_{\mathbb{Q}S}$ endlich präsentiert und daher S -torsionslos ist (3.3). Insbesondere folgt $\text{To}(A_{\mathbb{Q}S}) = 0$. Wegen 6.3, 1) bedeutet dies, daß $A_{\mathbb{Q}S} \rightarrow S$ injektiv ist - also ist R^S flach.

2) Sei U endlich erzeugter Untermodul des freien Moduls F_R . Dann ist $U_{\mathbb{Q}S}$ endlich erzeugter Untermodul des freien S -Moduls $F_{\mathbb{Q}S}$, daher fast endlich präsentiert. Sei nun $0 \rightarrow K_R \rightarrow R_R^m \rightarrow U_R \rightarrow 0$ exakt mit $m \in \mathbb{N}$. Dann ist auch die Folge $0 \rightarrow K_{\mathbb{Q}S} \rightarrow S^m \rightarrow U_{\mathbb{Q}S} \rightarrow 0$ exakt und nach 5.4, 3) daher $K_{\mathbb{Q}S}$ fast endlich erzeugt. Also gibt es endlich viele Elemente $k_1, \dots, k_n$ aus K , so daß $V = \sum_i (k_i \otimes 1)S$ dichter Untermodul von $K_{\mathbb{Q}S}$ ist. Damit wird der von $\{k_i\}$ erzeugte Untermodul W dicht in K_R : Sei L Untermodul von K mit $W \subset L$. Da R^S flach ist, wird $(L/W)_{\mathbb{Q}S} \cong (L_{\mathbb{Q}S})/(W_{\mathbb{Q}S}) \cong (L_{\mathbb{Q}S})/V$ Untermodul von $(K_{\mathbb{Q}S})/V$, also $0 = \text{Hom}_S((L/W)_{\mathbb{Q}S}, S) \cong \text{Hom}((L/W)_R, S_R)$, insbesondere $0 = \text{Hom}_R(L/W, R)$, denn $R_R \subset S_R$; das bedeutet aber, daß W dicht in K ist. Also ist K fast endlich erzeugt und U fast endlich präsentiert.

7. Absolut reine Gruppenringe

Vorbemerkung: Sei S ein Ring, G eine Gruppe und $R = SG$ der Gruppenring. Bekanntlich ist R genau dann von Neumann-regulär, wenn S es ist, G lokal-endlich ist und alle Ordnungen endlicher Untergruppen von G Einheiten in S sind - dieses von Auslander, McLaughlin & Connell stammende Ergebnis findet sich etwa in [14 ; p.155]. Ein weiteres Beispiel eines absolut reinen Gruppenrings hat M.-P. Malliavin [15 ; Prop.1] angegeben: Mit einem Körper S der Charakteristik $p \neq 0$ und der p -Prüfergruppe G ist R absolut rein (und kohärent). Mit Hilfe der Methoden aus [14] läßt sich leicht der allgemeine Fall charakterisieren:

7.1 Satz: Der Gruppenring $R = SG$ ist genau dann links-absolut rein, wenn der Ring S es ist und die Gruppe G lokal endlich ist.

Beweis:

1) Sei ${}_R R$ absolut rein. Daß ${}_S S$ absolut rein ist, ergibt sich aus folgendem Hilfssatz, denn R_S ist frei und ${}_S S$ ist direkter Summand von ${}_S R$:

7.2 Hilfssatz: Für eine reine Ringerweiterung ${}_S S \hookrightarrow {}_S R$ mit flachem R_S gilt: Ist R links-absolut rein, dann auch S .

Beweis: Da R_S flach ist, erhält der vergessende Funktor $R\text{-Mod} \longrightarrow S\text{-Mod}$ absolute Reinheit (wie bekanntlich auch Injektivität - die Beweise sind identisch). Also ist ${}_S R$ absolut rein, daher auch ${}_S S$ als reiner Untermodul von ${}_S R$.

G ist lokal endlich: Dazu sei $H = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ eine endlich erzeugte Untergruppe von G . Nach [14; p.153 Lemma 1] ist das R -Rechtsideal $\omega H = \sum_{h \in H} (1-h)R$ endlich erzeugt mit dem Erzeugendensystem $(1-g_i \mid 1 \leq i \leq n)$, ferner $\omega H \neq R$. Da ${}_R R$ absolut rein und $R/\omega H_R$ endlich präsentiert, daher torsionslos ist (3.3), folgt $\omega H = \mathcal{W}_R \mathcal{L}_R(\omega H)$, insbesondere $\mathcal{L}_R(\omega H) \neq 0$. Mit [14; p.154 Lemma 2(a)] folgt, daß die Untergruppe H endlich ist.

2) Sei nun ${}_S S$ absolut rein und G lokal endlich. Dann ist die Gruppe G nach oben gefilterte Vereinigung ihrer endlichen Untergruppen G_i ($i \in I$) und $R = SG$ nach oben gefilterte Vereinigung der Unterringe $R_i = SG_i$ (mit $1_{R_i} = 1_R = 1_G$). Es genügt daher zu zeigen, daß alle R_i absolut rein sind und daß gefilterte Vereinigungen absolut reiner Ringe wieder von dieser Art sind:

7.3 Hilfssatz: Sei $S \rightarrow R$ ein Ringhomomorphismus, derart daß R_S endlich präsentiert und $\text{Hom}({}_R R_S, S_S)$ flacher R -Rechtsmodul ist. Dann ist R links-absolut rein, falls S es ist.

Beweis:

Ist ${}_S S$ absolut rein, dann koerzeugt S_S alle endlich präsentierten S -Rechtsmoduln, insbesondere alle Kokerne von Homomorphismen $R_S^m \rightarrow R_S^n$ ($m, n \in \mathbb{N}$). Damit ist das Kriterium 2.3 auf den Bimodul ${}_R R_S$ anwendbar und ${}_R R$ absolut rein.

Ist speziell $R = SH$ mit einer endlichen Gruppe H , dann genügt $S \hookrightarrow R$ den Voraussetzungen von 7.3, denn R_S ist frei und endlich erzeugt und $\text{Hom}({}_R R_S, S_S) \cong R_R$ [14; p.162 Exercise 5].

7.4 Hilfssatz: Der Ring $R = \bigcup_{i \in I} R_i$ sei gefilterte Vereinigung der unitären Unterringe R_i . Dann ist R linksabsolut rein, wenn alle R_i es sind.

Beweis:

Sei ${}_R F$ frei mit Basis $(e_1, \dots, e_n)$ ($n \in \mathbb{N}$), $U = \sum_{h=1}^m R u_h$ ($m \in \mathbb{N}$) ein endlich erzeugter Untermodul mit $u_h = \sum_{k=1}^n r_{hk} e_k$ ($r_{hk} \in R$)

und ${}_R U \xrightarrow{f} {}_R R$ vorgegeben. Konstruktion einer Fortsetzung ${}_R F \xrightarrow{g} {}_R R$:

Nach Voraussetzung existiert ein $i \in I$, so daß alle r_{hk} und $f(u_h)$ in R_i liegen. Sei ${}_{R_i} F' = \bigoplus_{k=1}^n R_i e_k$, dann ist

$U' = \sum_h R_i u_h \subset {}_{R_i} F'$ und $f(U') \subset R_i$. Ist f' die $(R_i$ -lineare)

Einschränkung von f , d.h. $U' \xrightarrow{f'} {}_{R_i} R_i$ kommutativ, dann gibt es

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{f'} & {}_{R_i} R_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{f} & R \end{array}$$

nach Voraussetzung eine R_i -lineare Fortsetzung $F' \xrightarrow{g'} {}_{R_i} R_i$ von f' .

Mit $g(e_k) := g'(e_k)$ folgt $g(u_h) = \sum_k r_{hk} g'(e_k) = f'(u_h) = f(u_h)$.

Also ist g die gewünschte Fortsetzung von f .

Damit ist der Beweis von 7.1 vollständig.

Literatur

- 1 M.Auslander: Coherent functors. Proceedings of the conference on categorical algebra, La Jolla 1965; 189-231. Springer, Berlin 1966.
- 2 N.Bourbaki: Algèbre commutative, chap.1,2. Hermann, Paris 1961.
- 3 H.Cartan, S.Eilenberg: Homological algebra. Princeton University Press, Princeton N.J. 1956.
- 4 V.C.Cateforis: Flat regular quotient rings. Trans.Amer.Math.Soc.138(1969), 241-249.
- 5 S.U.Chase: Direct products of modules. Trans.Amer.Math.Soc.97(1960), 457-473.
- 6 P.M.Cohn: On the free product of associative rings. Math.Z.71(1959), 380-398.
- 7 R.Desq: Sur les anneaux de quotients. C.R.Acad.Sc.Paris, t.272, série A(1971), 199-202.
- 8 D.J.Fieldhouse: Pure theories. Math.Ann.184(1969), 1-18.
- 9 E.R.Gentile: Purity and algebraic closure. Rev.Un.Mat. Argentina 24(1968), 37-47.
- 10 A.Grothendieck: Sur quelques points d'algèbre homologique. Tôhoku Math.J.9(1957), 119-221.
- 11 M.Ikeda, T.Nakayama: On some characteristic properties of quasi-Frobenius and regular rings. Proc.Amer.Math.Soc.5 (1954), 15-19.
- 12 I.Kaplansky: Fields and rings. The University of Chicago Press, Chicago 1969.
- 13 F.Kasch: Vorlesung über Ringe und Moduln. Universität München 1970/71.
- 14 J.Lambek: Lectures on rings and modules. Blaisdell, Waltham Mass. 1966.
- 15 M.-P.Malliavin: Sur les anneaux de groupes FP-self-injectifs. C.R.Acad.Sc.Paris, t.273, série A(1971), 88-91.
- 16 B.L.Osofsky: A generalization of quasi-Frobenius rings. J.Algebra 4(1966), 373-387.
- 17 G.Sabbagh: Sur la pureté dans les modules. C.R.Acad.Sc. Paris, t.271, série A(1970), 865-867.
- 18 B.T.Stenström: Coherent rings and FP-injective modules. J.London Math.Soc.(2), 2(1970), 323-329.
- 19 B.T.Stenström: Pure submodules. Ark.Mat.7(1967), 159-171.
- 20 R.B.Warfield: Purity and algebraic compactness for modules. Pac.J.Math.28(1969), 699-719.

Lebenslauf

Ich bin am 30. Dezember 1941 in Posen als erstes Kind meiner Eltern Christa, geb. Meyer und Rudolf Würfel geboren. Nach dem Besuch einiger Volks- und Oberschulen in Westdeutschland und in Zürich habe ich im Juni 1961 am Realgymnasium in Nürnberg die Reifeprüfung abgelegt und darauf ein Jahr an der Pariser Universität Mathematik und Physik gehört.

Vom Wintersemester 1962/63 bis zum Wintersemester 1968/69 war ich an der Münchner Universität immatrikuliert, wo ich mich im Januar 1965 der Vorprüfung für Physik und im Mai 1968 der Diplomprüfung in Mathematik naturwissenschaftlicher Richtung unterzog.

Seit dem Februar 1970 bin ich Mitarbeiter des mathematischen Instituts der Münchner Technischen Universität.

München, den 27. Dezember 1971

Tilman Würfel

Accord Blitz

München 2

Telefon 77 5218

Lindwurmstraße 60/0 Ghs.

